Projektovanje algoritama

L02. Rast funkcija. Asimptotska notacija

Asimptotska notacija

Asimptotska notacija nam daje opis ponašanja **funkcije** za **velike ulazne vrednosti**.

$$y(n) = an^2 + bn + c \xrightarrow[\text{se ponaša kao}]{n \to \infty} an^2$$

Rast funkcije n^2 je **brži** od funkcija sa manjim stepenom!

Kada $n \to \infty$, an^2 dominira nad ostalim sabircima i oni se mogu **zanemariti**.

Koje funkcije su nama zanimljive kod algoritama?

Vreme izvršavanja algoritma u zavisnosti od veličine ulaza:

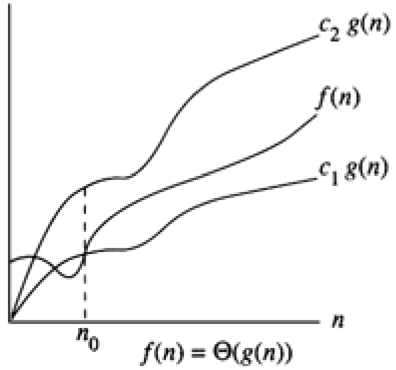
- za najgori (odn. najsporiji) slučaj = ***worst-case*** *running time*
- srednja vrednost za sve mogućnosti ulaza = ***average-case*** *running time*
- za najbolji (odn. najbrži) slučaj = ***best-case*** *running time*

Zauzeti memorijski prostor, veličina implementacije algoritma, itd.
– manje značajni na ovom predmetu!

Θ - notacija

$$\theta\big(g(n)\big) = f(n) \mid (\exists c_1, c_2, n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Funkcija $f(n) = \theta(g(n))$ ukoliko se, posle neke vrednosti n_0, ona nalazi "u sendviču" između dve funkcije koje se razlikuju od $g(n)$ samo u konstantnom faktoru.



$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C\ \ (ako\ postoji)\ (C > 0)$$

Θ - notacija (primer)

Pokazati da je: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \theta(n^2)$

1. način: Pronaći konstante c_1 i c_2 takve da je $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$.

$$c_1 \leq \frac{1}{14}, \; c_2 \geq \frac{1}{2}$$

2. način: Limit!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2 - 3n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

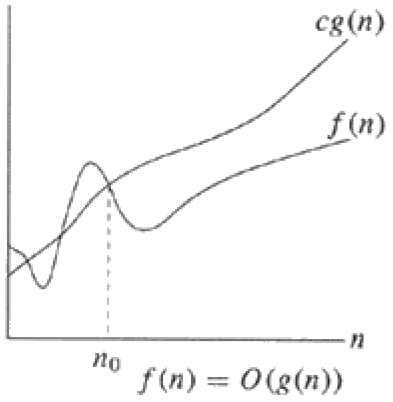
Napomena:

$\theta(1)$ - konstanta

O - notacija

$$O(g(n)) = f(n) \mid (\exists c, n_0 > 0)(\forall n \geq n_0) \ \ 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

Funkcija $f(n) = O(g(n))$ ukoliko se, posle neke vrednosti n_0, ona **ne nalazi iznad** funkcije koja se razlikuje od $g(n)$ samo u konstantnom faktoru.



© MIT Press, Cormen et al. „Introduction to Algorithms“

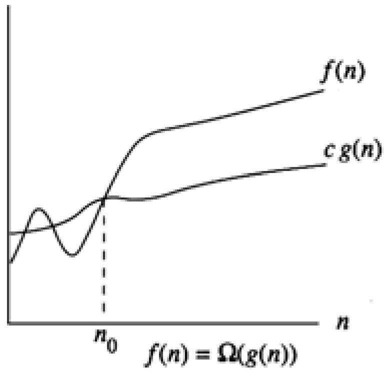
worst-case running time

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \ \ (ako\ postoji)\ (C \geq 0)$$

Ω - notacija

$$\Omega\big(g(n)\big) = f(n) \mid (\exists c, n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq cg(n) \leq f(n)$$

Funkcija $f(n) = \Omega(g(n))$ ukoliko se, posle neke vrednosti n_0, ona **ne nalazi ispod** funkcije koja se razlikuje od $g(n)$ samo u konstantnom faktoru.



best-case running time

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C\ \ (ako\ postoji)\ (C > 0)\ ili\ \infty$$

Primena asimptotske notacije u formulama

$$2n^2 + 3n + 1 = \theta(n^2)$$

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \theta(n)$$

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + 3n + \theta(1)$$

Kada god nam **nije važno koja funkcija** je u pitanju, ali nam je **važno kojoj klasi funkcija** po rastu ona pripada, možemo iskoristiti asimptotsku notaciju.

Bilo koja funkcija ove klase

$$2n^2 + \theta(n) = \theta(n^2)$$

Dva stepena slobode!

„Jače" notacije

$$o(g(n)) = f(n) \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq f(n) < cg(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$ asimptotski manja (sporije raste)

$$\omega(g(n)) = f(n) \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq cg(n) < f(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$ asimptotski veća (brže raste)

Primeri

Uporediti funkcije: $f(n) = 2^n,\ g(n) = 2^{n+1}$.

$$g(n) = 2 \times 2^n = 2f(n) \Rightarrow f(n) = \theta(g(n))$$

Uporediti funkcije: $f(n) = 2^n,\ g(n) = 2^{2n}$.

$$g(n) = (2^n)^2 = f(n)^2 \Rightarrow f(n) = o(g(n))$$

Monotonost funkcija

$m \leq n \rightarrow f(m) \leq f(n)$ monotono rastuća

$m \leq n \rightarrow f(m) \geq f(n)$ monotono opadajuća

$m < n \rightarrow f(m) < f(n)$ striktno rastuća

$m < n \rightarrow f(m) > f(n)$ striktno opadajuća

Neke važne notacije

$\lfloor x \rfloor$ FLOOR – najveći ceo broj manji od broja X

$\lceil x \rceil$ CEILING – najmanji ceo broj veći od broja X

$$a \, mod \, n = a - n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$

$$a \equiv b \ (mod \ n)$$

ekvivalentnost (kongruentnost) po modulu

Rast funkcija – polinomske funkcije

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

$$p(n) = \theta(n^d)$$

Rast funkcija - eksponencijalne funkcije

$$f(n) = a^n, \qquad a \geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = ? \qquad \mathbf{0}$$

Svaka eksponencijalna funkcija raste **brže** od bilo koje polinomske!

Kako možemo izračunati eksponencijalnu funkciju pomoću polinomskih?

Taylor-ov red

Rast funkcija - logaritamske funkcije

$$f(n) = \log_a n\,, \qquad a > 1, n > 0$$

polinomska funkcija od lg(n)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{lg^b n}{n^a} = ? \qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{lg^b n}{(2^a)^{lgn}} = 0$$

eksponencijalna funkcija od lg(n)

Svaki stepen logaritamske funkcije raste **sporije** od bilo koje polinomske!

Rast funkcija - faktorijel

$$f(n) = n!$$

Uporedimo faktorijel sa eksponencijalnom funkcijom:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times \cdots \times (n-1) \times n$$
$$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times \cdots \times a \qquad \times a$$

$$n! = \omega(a^n)$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$n! = o(n^n)$$

Rast funkcija – zaključak

$$C \ll lg^b(n) \ll n^a \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Primer - Fibonacci niz

Kojom brzinom, odn. uporedivo sa kojom klasom funkcija, raste Fibonacci-jev niz?

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 1$$
$$F(i) = F(i-1) + F(i-2), \qquad i \geq 2$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F(i) = \frac{\varphi^i - \bar{\varphi}^i}{\sqrt{5}} \ \wedge \ \frac{\left|\bar{\varphi}^i\right|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ F(i) = \left\lfloor \frac{\varphi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Eksponencijalno!

Za one koji vole matematiku ...

Dokazati da važi sledeće:

$$k \ln k = \Theta(n) \;\; \Rightarrow \;\; k = \Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$


thank you!